

数 学 试 题

命题学校：武汉二中 命题人：赖海燕 江峰 审题人：邹建华

审题学校：襄阳四中 审题人：程孟良 杨超

考试时间：3 月 24 日 15:00—17:00

考试用时：120 分钟 全卷满分：150 分

★祝考试顺利★

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $\bar{z}(1+2i)=2-i$ ，则复数 $z=(\quad)$

- A. -1 B. $-i$ C. i D. $2+i$

2. 已知 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$ ，则 $\tan \theta = (\quad)$

- A. 7 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{12}{5}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 5 项是 $(x - \frac{1}{x} + 2y)^6$ 展开式中的常数项，则 $a_2 + a_8 = (\quad)$

- A. 20 B. -20 C. 40 D. -40

4. 下列命题错误的是 $(\quad)$

A. 两个随机变量的线性相关性越强，相关系数的绝对值越接近于 1

B. 设 $\zeta \sim N(1, \sigma^2)$ ，且 $P(\zeta < 0) = 0.2$ ，则 $P(1 < \zeta < 2) = 0.2$

C. 线性回归直线 $\hat{y} = bx + a$ 一定经过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$

D. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精度越高

5. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 6 的球的球面上四点，且 $\triangle ABC$ 是边长为 9 的正三角形，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 $(\quad)$

- A. $\frac{81\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{243\sqrt{3}}{4}$

6. 已知非空集合 A, B 满足以下两个条件：

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $A \cap B = \emptyset$ ；

(2) A 的元素个数不是 A 中的元素， B 的元素个数不是 B 中的元素.

则有序集合对 (A, B) 的个数为 $(\quad)$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 直线 $x - y + 1 = 0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F ，交椭圆于 A, B 两点，交 y 轴于 C 点，若 $\overline{FC} = 2\overline{AC}$ ，则该椭圆的离心率是 $(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $2\sqrt{2}-2$ D. $\sqrt{2}-1$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2+3\ln x, & x \geq 1 \\ x+1, & x < 1 \end{cases}$ ，若 $m \neq n$ ，且 $f(m) + f(n) = 4$ ，则 $m+n$ 的最小值是 $(\quad)$

- A. 2 B. $e-1$ C. $4-3\ln 3$ D. $3-3\ln 2$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 一个口袋中有大小形状完全相同的 3 个红球和 4 个白球，从中取出 2 个球. 下面几个命题中正确的是 $(\quad)$

A. 如果是不放回地抽取，那么取出两个红球和取出两个白球是对立事件

B. 如果是不放回地抽取，那么第 2 次取到红球的概率一定小于第 1 次取到红球的概率

C. 如果是有放回地抽取，那么取出 1 个红球 1 个白球的概率是 $\frac{24}{49}$

D. 如果是有放回地抽取，那么在至少取出一个红球的条件下，第 2 次取出红球的概率是 $\frac{7}{11}$

10. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$ ， $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，且过点 $(0, \sqrt{2})$ ，则下列正确的为 $(\quad)$

A. $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

B. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减

C. $f(|x|)$ 的周期为 π

D. 把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位得到的函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x) = \sqrt{2} \cos 2x$

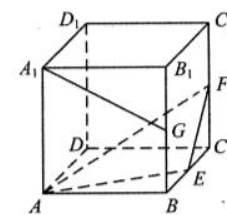
11. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点. 则 $(\quad)$

A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$

D. 点 A_1 和点 D 到平面 AEF 的距离相等



12. 数学中的很多符号具有简洁、对称的美感，是形成一些常见的漂亮图案的基石，也是许多艺术家设计作品的主要几何元素. 如我们熟悉的 ∞ 符号，我们把形状类似 ∞ 的曲线称为“ ∞ 曲线”. 经研究发现，在平面直角坐标系 xOy 中，到定点 $A(-a, 0), B(a, 0)$ 距离之积等于 $a^2 (a > 0)$ 的点的轨迹 C 是“ ∞ 曲线”. 若点 $P(x_0, y_0)$ 是轨迹 C 上一点，则下列说法中正确的有 $(\quad)$

A. 曲线 C 关于原点 O 中心对称；

B. x_0 的取值范围是 $[-a, a]$ ；

C. 曲线 C 上有且仅有一个点 P 满足 $|PA| = |PB|$ ；

D. $PO^2 - a^2$ 的最大值为 $2a^2$.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

14. 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查, 发现其用电量都在 50 到 350 度之间, 频率分布直方图如图所示, 则直方图中的 x 值为_____.

15. 写出一个渐近线的倾斜角为 60° 且焦点在 y 轴上的双曲线标准方程_____.

16. 已知不等式 $(2ax - \ln x)[x^2 - (a+1)x + 1] \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

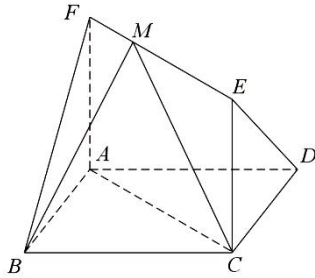
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AB=2$, $BD=5$.

- (1) 求 $\cos \angle ADB$;
(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .

18. (本小题 12 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, 四边形 $ACEF$ 为矩形, 平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$, $AF = 1$, 点 M 在线段 EF 上运动.

- (1) 当 $AE \perp DM$ 时, 求点 M 的位置;
(2) 在 (1) 的条件下, 求平面 MBC 与平面 ECD 所成锐二面角的余弦值.



19. (本小题 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = 2n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 $m, k (1 < m < k)$, 使得 $S_k = 4S_m$?
若存在, 求出 m, k 的值; 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题 12 分) 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内. 如图 1 所示的高尔顿板有 7 层小木块, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右滚下, 依次经过 6 次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 1, 2, ..., 7 的球槽内. 例如小球要掉入 3 号球槽, 则在 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚下.

- (I) 如图 1, 进行一次高尔顿板试验, 求小球落入 5 号球槽的概率;
(II) 小红、小明同学在研究了高尔顿板后, 利用高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动. 小红使用 图 1 所示的高尔顿板, 付费 6 元可以玩一次游戏, 小球掉入 m 号球槽得到的奖金为 ξ 元, 其中 $\xi = |16 - 4m|$. 小明改进了高尔顿板(如图 2), 首先将小木块减少成 5 层, 然后使小球在下落的过程中与小木块碰撞时, 有 $\frac{1}{3}$ 的概率向左, $\frac{2}{3}$ 的概率向右滚下, 最后掉入编号为 1, 2, ..., 5 的球槽内, 改进高尔顿板后只需付费 4 元就可以玩一次游戏, 小球掉入 n 号球槽得到的奖金为 η 元, 其中 $\eta = (n - 4)^2$. 两位同学的高尔顿板游戏火爆进行, 很多同学参加了游戏, 你觉得小红和小明同学谁的盈利多? 请说明理由.

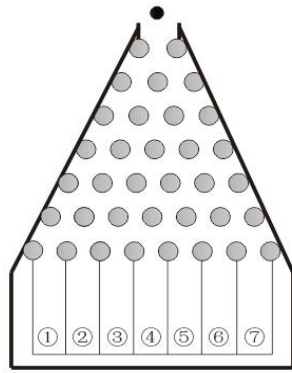


图 1

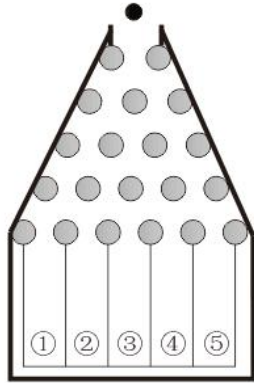


图 2

21. (本小题 12 分) 已知动点 P 在 x 轴及其上方, 且点 P 到点 $F(0, 1)$ 的距离比到 x 轴的距离大 1.

- (1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;
(2) 若点 Q 是直线 $y = x - 4$ 上任意一点, 过点 Q 作点 P 的轨迹 C 的两切线 QA 、 QB , 其中 A 、 B 为切点, 试证明直线 AB 恒过一定点, 并求出该点的坐标.

22. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{e^x}$ 在 $x = 2$ 时取到极大值 $\frac{4}{e^2}$.

- (1) 求实数 a, b 的值;
(2) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $g(x) = \min\left\{f(x), x - \frac{1}{x}\right\} (x > 0)$, 若函数 $h(x) = g(x) - tx^2$ 为增函数, 求实数 t 的取值范围.